هذه هى معادلة التشوهات ويجب التعبير عن التشوه فى المعادلة بواسطة القوى ، اما فى القضيب الوسطى فيجب ان نأخذ فى الاعتبار التشوه الناتج عن تأثير الحرارة :

$$\frac{N_1 l_1}{EF} = \left(\alpha l_2 \Delta t - \frac{N_2 l_2}{EF}\right) \cos \beta .$$

بحل ثلاث معادلات ذات ثلاثة مجاهيل، نحدد N_1 ، N_2 ، N_3 .

١٦ – الاجهادات فى المقاطع المائلة عند الشد (الانضغاط) فى اتجاه واحد

لاجل الحكم الصحيح على متانة المادة، تتحتم معرفة تحديد الاجهادات التى تؤثر على اى مقطع مائل للجزء المشدود (المضغوط) (الشكل ٢ — ٣٥). ان الاجهادات العمودية فى المقطع العرضى للقضيب σ_1 تعتبر معروفة لدينا . ($\sigma_1 = \frac{N}{F}$)

نحدد الاجهادات التى تظهر فى المقطع المائل AB حيث يشكل المتعامد معه زاوية قدرها α باتجاه σ_1 . ويعتبر اتجاه الزاوية α موجبا، اذا كان اتجاه الدوران مضادا لدوران عقرب الساعة.

لنرمز الى

F — مساحة المقطع العمودى على محور القضيب.

F_α — مساحة المقطع المائل.

وهنا

$$F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha} \qquad (٢ — ٢٤)$$

وبصورة عامة، يمكن ان تؤثر الاجهادات العمودية σ_α والاجهادات المماسية τ_α على المقطع المائل. ونحصل على مقاديرها من شروط توازن القسم المقطوع، وليكن مثلا القسم الاسفل (الشكل ٢ — ٣٥، b). نسقط القوة على اتجاه σ_α :

$$\sigma_\alpha F_\alpha - \sigma_1 F \cos \alpha = 0.$$

Sin α m α = Sin 2α

وباستعمال العلاقة (٢ — ٣٤)، نحصل على:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha \qquad (٢ — ٣٥)$$

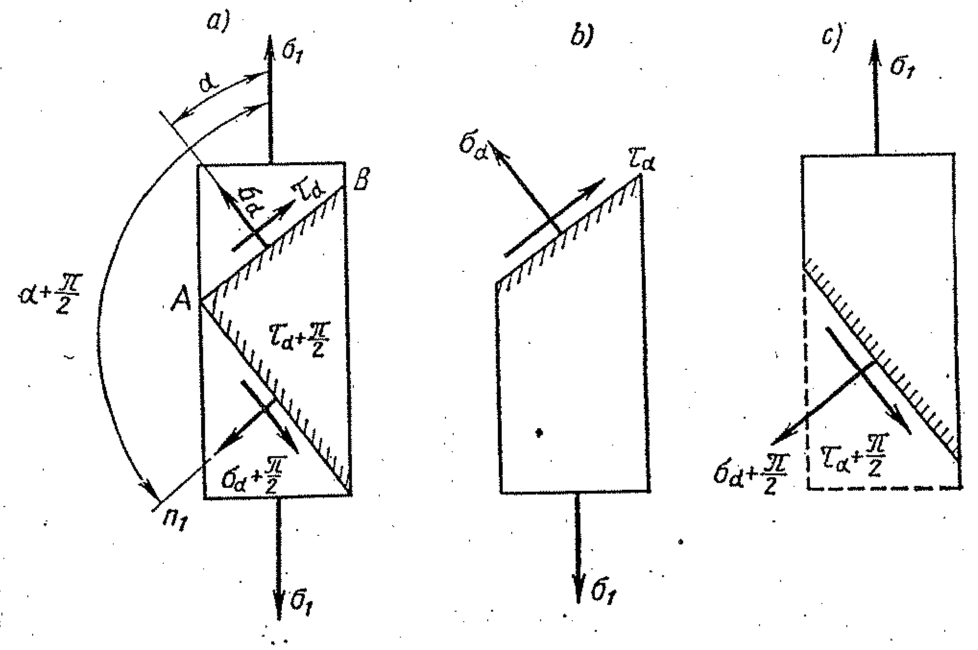
وباسقاط القوى على اتجاه τ_α ، نحصل على:

$$\tau_\alpha F_\alpha - \sigma_1 F \sin \alpha = 0$$

ومن هنا:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \qquad (٢ — ٣٦)$$

عندما تكون قيمة σ_1 موجبة (اى شادة) وعندما تكون الزاوية $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$ فاننا نحصل على قيمة موجبة لـ τ_α. وهذا يعنى ان الاجهاد المماسى يكون اتجاهه كما هو مبين فى الشكل ٢ — ٣٥، b.



الشكل ٢ — ٣٥

ان الاتجاه المعطى للاجهاد المماسى، يبين ان العمودى n على المساحة يجب ادارته باتجاه عقرب الساعة، لكى ينطبق مع الاجهاد المماسى. وتعتبر مثل هذه الاتجاهات للاجهادات المماسية موجبة *.

*فى نظرية المرونة تستعمل قاعدة اخرى لتحديد اشارات الاجهادات المماسية.

واذا توجبت ادارة العمودى على المساحة باتجاه مضاد لدوران عقرب الساعة لكى ينطبق مع الاجهاد المماسى، فان الاجهاد المماسى يعتبر سالبا (انظر الشكل ٢ — ٣٥، c).

ويستخلص من الصيغة (٢ — ٢٥) بان النهاية العظمى للاجهادات العمودية تكون فى حالة $\alpha = 0$ ، اى فى المقطع العمودى على محور القضيب.

ويستنتج من الصيغة (٢ — ٢٦) بانه عندما تكون $\alpha = 0$ فان $\tau = 0$ ، اذن فان الاجهاد العمودى فى المقطع العرضى هو الاجهاد الرئيسى (انظر البند ٧).

ويتضح لنا من الصيغتين (٢ — ٢٥) و (٢ — ٢٦) انه فى حالة $\alpha = 90°$ فان $\sigma = 0$ و $\tau = 0$ ؛

وعلى هذا الاساس، ففى المقطع الطولى لا توجد اجهادات عمودية ولا مماسية. ويتضح من الصيغة (٢ — ٢٦) ايضا، ان الاجهادات المماسية العظمى تكون فى حالة المقطع الذى يميل بزاوية $\alpha = 45°$ وتساوى نصف الاجهادات الرئيسية.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}.$$

١٧ — قانون ازدواج الاجهادات المماسية

نحدد الاجهادات العمودية والمماسية على مساحتين متعامدتين.

بالنسبة للمساحة المائلة بزاوية α وبواسطة الصيغتين (٢ — ٢٥) و (٢ — ٢٦) يوجد عندنا:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha$$

وبالنسبة للمساحة الأخرى عندما تكون زاوية ميلها $\alpha + \frac{\pi}{2}$ (انظر الشكل ٢ — ٣٥، c)، يتم تحديد الاجهادات العمودية والمماسية، اما مباشرة بواسطة شروط توازن قسم القضيب الاعلى او الاسفل (الشكل ٢ — ٣٥، c) او بواسطة الصيغتين (٢ — ٢٥) و (٢ — ٢٦) مع التعويض عن α ب $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

وباستعمال الصيغتين (٢ ــ ٢٥) و (٢ ــ ٢٦) نحصل على :

$$\sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \sigma_1 \cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \sigma_1 \sin^2\alpha \qquad (٢ - ٢٧)$$

$$\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \qquad (٢ - ٢٨)$$

وبتحليل النتائج التى حصلنا عليها نجد انه، اولا :

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \sigma_1$$

اى ان مجموع الاجهادات العمودية فى المساحتين المتعامدتين هو مقدار ثابت، ويساوى الاجهاد الرئيسى، ثانيا :

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}} \qquad (٢-٢٩)$$

اى فى المساحتين المتعامدتين، تؤثر الاجهادات المماسية بصورة متساوية من حيث المقدار ومختلفة فى الاشارة (هذا هو قانون ازدواج او تبادل الاجهادات المماسية) فالاجهادات المماسية فى المساحات المتعامدة هنا متجهة اما الى خط تقاطع المساحتين، واما متجهة منه وهذا موضح فى الشكل ٢ ــ ٣٥، a.

فاذا غيرنا اشارة σ_1 مثلا، فان الاجهادين τ_α و $\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ يغيران اتجاههما الى الجهة المضادة، ويكون كلاهما متجها نحو خط تقاطع المساحتين A.

ان قانون ازدواج (تبادل) الاجهادات المماسية يستعمل ليس فقط فى حالة الاجهادات الوحيدة المحور، وانما ايضا للاجهادات الثنائية المحور وللاجهادات الحجمية.

١٨ ــ تحديد الاجهادات فى المقاطع المائلة فى حالة الشد (الانضغاط) فى اتجاهين

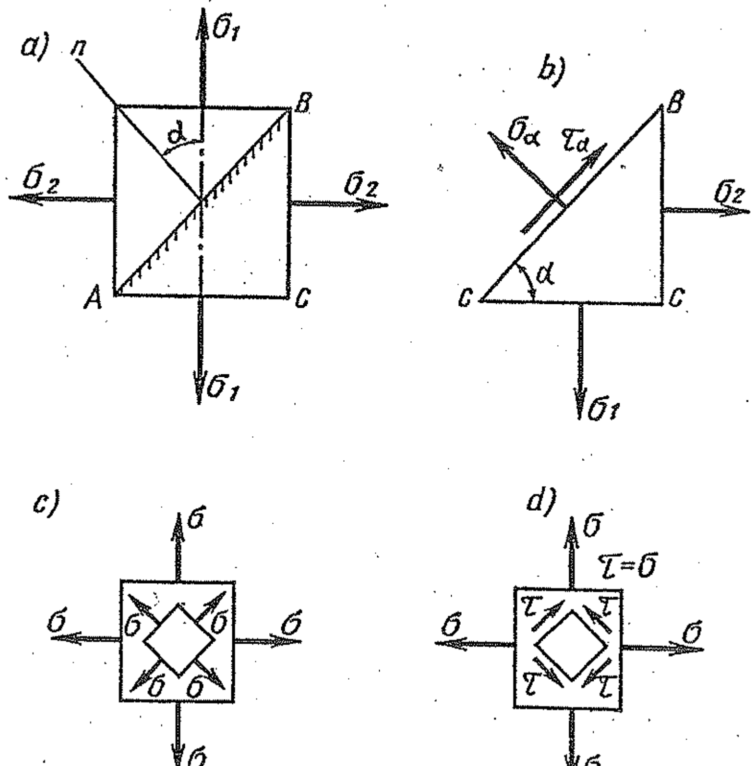
نبحث حالة الاجهادات السطحية (الشكل ٢ ــ ٣٦، a) عندما يكون كلا الاجهادين الرئيسيين (σ_2 و σ_1) موجبين اى فى حالة الشد.

وكما ذكرنا اعلاه، فان اشارات الاجهادات الرئيسية توضع بحيث تتحقق

حالة عدم المساواة $\sigma_1 > \sigma_2$. ان الزاوية الموجبة α بين اتجاه σ_1 والعمودى على مساحة اختيارية، تؤخذ باتجاه مضاد لدوران عقرب الساعة.

بين اتجاه الاجهاد σ_2 والمساحة توجد زاوية تساوى $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

ان الاجهادات σ_α و τ_α فى المقطع المائل الاختيارى، يمكن تحديدها ما بواسطة شروط توازن المنشور الثلاثى السطوح ABC ، او الحساب بواسطة لصيغتين (٢ — ٢٥) و (٢ — ٢٦)، بجمع الاجهادات التى نجمت عن تأثير σ_1 والاجهادات التى نجمت عن تأثير σ_2 (بعد استبدال الزاوية α بزاوية $\alpha + \frac{\pi}{2}$).



الشكل ٢ — ٣٦

وفى النتيجة نحصل على:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

ومن هنا:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha . \qquad (٣٠ — ٢)$$

وبعد ذلك

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2}\sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

ومن هنا:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha \qquad (٢ - ٣١)$$

ويتضح من الصيغة (٢ — ٣١)، ان الاجهادات المماسية العظمى تساوي نصف الفرق بين الاجهادين الرئيسيين:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (٢ - ٣٢)$$

وهذه تكون فى المقاطع المائلة عن اتجاه σ_1 و σ_2 بنفس الزاوية، اى بزاوية $\alpha = 45°$. وهذا يستنتج من الحالات التى تناظر فيها τ_{max}؛ $\sin 2\alpha = 1$

وبتحديد الاجهادات المماسية فى المساحة العمودية على مساحة AB، نرى ان قانون ازدواج الاجهادات المماسية يحتفظ بمفعوله ايضا فى حالة الاجهادات الثنائية المحور. ويمكن التأكد من هذا ايضا بواسطة استعمال الصيغة (٢ — ٣١) لتحديد قيم τ_α و $\tau_{\alpha+90°}$.

حالات خاصة

الحالة الاولى. نبحث حالة الاجهاد التى فيها $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (الشكل ٢ — ٣٦، c). فى هذه الحالة فان جميع الاجهادات المماسية τ_α فى جميع المساحات المارة فى النقطة موضع البحث تساوى صفرا، وان الاجهاد العمودى له قيمة واحدة $\sigma_\alpha = \sigma$ (انظر الصيغتين ٢ — ٣٠ و ٢ — ٣١). ان مثل حالة الاجهاد هذه تسمى بالشد (الانضغاط) الثنائى المحور المنتظم.

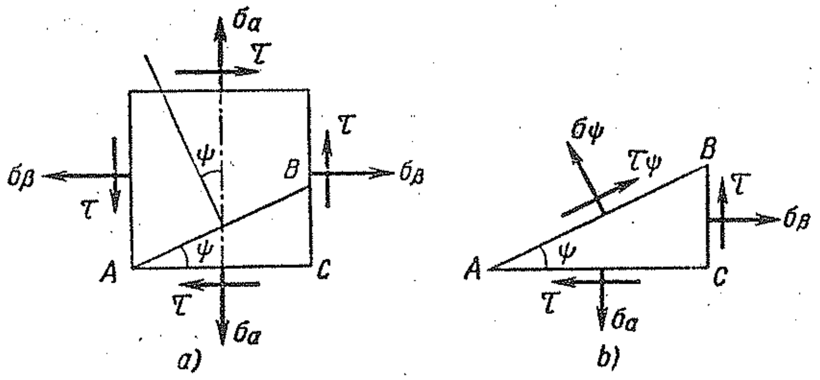
الحالة الثانية. نبحث حالة الاجهاد المبينة فى الشكل ٢ — ٣٦، d، والتى تمثل الاجهادات الرئيسية $\sigma_1 = \sigma$ و $\sigma_2 = -\sigma$.

نحدد الاجهاد فى المقاطع المتساوية الميلان عن اتجاهات σ_1 و σ_2 اى $\alpha = 45°$ و $\alpha = 135°$.

وباستعمال الصيغتين (٢ — ٣٠) و (٢ — ٣١) نحصل على: $\sigma_\alpha = 0$ و $\tau_\alpha = \pm\sigma$. ان حالة الاجهاد هذه تسمى بـ «القص البحت».

١٩ — تحديد الاجهادات الرئيسية وموضع المساحات الرئيسية

لنبحث مسألة عكسية. اذا اعطيت الاجهادات العمودية والمماسية التى تؤثر على السطوح الخارجية للمادة (الشكل ٢ — ٣٧، a). يطلب تحديد موضع المساحات الرئيسية ومقدار الاجهادات الرئيسية. نبحث توازن المنشور الثلاثى السطوح، الذى تكون قاعدته ABC (الشكل ٢ — ٣٧، b) ونفترض بان $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$، والزاوية ψ تقاس من اتجاه الاجهاد الكبير نحو اتجاه العمودى على المساحة. ونعتبر اتجاه الزاوية ψ موجبا ، اذا كان اتجاه الدوران مضادا لاتجاه دوران عقرب الساعة. ونرمز الى مساحة السطح المائل بـ dF . ان مساحة السطح الرأسى عند ذلك تكون $dF \sin\psi$ ، ومساحة السطح الافقى تكون $dF \cos\psi$.



الشكل ٢ — ٣٧

وباسقاط جميع القوى على اتجاه σ_ψ ، نحصل على:

$$\sigma_\psi dF - (\sigma_\alpha dF \cos\psi)\cos\psi + (\tau dF \cos\psi)\sin\psi +$$
$$+ (\tau dF \sin\psi)\cos\psi - (\sigma_\beta dF \sin\psi)\sin\psi = 0 .$$

ونقوم الان باسقاط جميع القوى على اتجاه τ_ψ، وهنا نحصل على:

$$\tau_\psi dF - (\sigma_\alpha dF \cos\psi)\sin\psi - (\tau dF \cos\psi)\cos\psi +$$
$$+ (\tau dF \sin\psi)\sin\psi + (\sigma_\beta dF \sin\psi)\cos\psi = 0.$$

لنختصر dF ونضع دوال الزوايا المزدوجة، فنحصل على:

$$\sigma_\psi = \sigma_\alpha \cos^2\psi + \sigma_\beta \sin^2\psi - \tau \sin 2\psi \qquad (٢ - ٣٣)$$

$$\tau_\psi = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2} \sin 2\psi + \tau \cos 2\psi \qquad (٢ - ٣٤)$$

وبتغيير زاوية ميلان المساحة ψ فان مقدار σ_ψ و τ_ψ يتغير باستمرار.

ولاجل العثور على موضع المساحات الرئيسية، اى المساحات التى تؤثر فيها الاجهادات العمودية العظمى، يجب اما ان تساوى المشتقة $\frac{d\sigma_\psi}{d\psi}$ صفرا، واما ان تساوى الاجهادات المماسية τ_ψ صفرا، وذلك لان فى المساحات الرئيسية لا توجد اجهادات مماسية.

ولتحديد زاوية ψ_0 ميلان المساحات الرئيسية فى كلتا الحالتين نحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2} \sin 2\psi_0 + \tau \cos 2\psi_0 = 0$$

او

$$\tan 2\psi_0 = \frac{2\tau}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \qquad (٢ - ٣٥)$$

وللحصول على القيمة العظمى للاجهادات العمودية، اى مقادير الإجهادات الرئيسية، نعوض بقيم الزاوية من الصيغة (٢ — ٣٥) فى الصيغة (٢ — ٣٣). ومقدما، يجب تعويض الدالة المثلثية فى الصيغة (٢ — ٣٣)، بظل الزاوية الزوجية. ولاجل هذا نستعمل قوانين حساب المثلثات المعروفة:

$$\left.\begin{aligned}
\sin 2\psi_0 &= \pm \frac{\tan 2\psi_0}{\sqrt{1+\tan^2 2\psi_0}}\,; \\
\cos 2\psi_0 &= \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\psi_0}}\,; \\
\cos^2\psi_0 &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\psi_0)\,; \\
\sin^2\psi_0 &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\psi_0).
\end{aligned}\right\}$$

وبعد تحويلات بسيطة، من الضروري ان يقوم بها الطلاب انفسهم، نحصل على الصيغة التالية لتحديد الاجهادات الرئيسية:

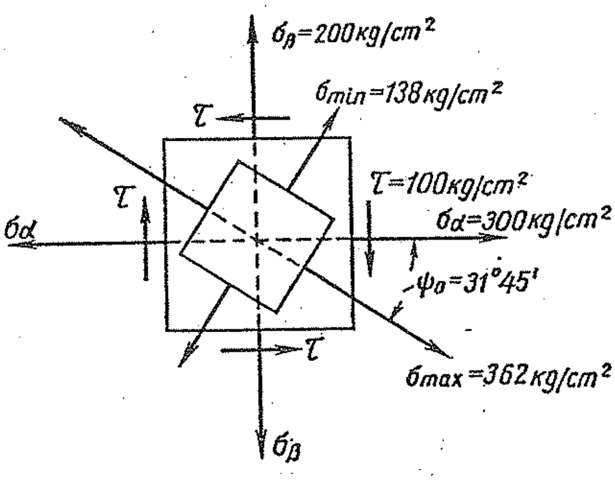
$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \qquad (٢ - ٣٦)$$

واذا كان احد الاجهادات العمودية المعطاة يساوي صفرا، فان الصيغة (٢ – ٣٦) تبسط وتكتب على الشكل التالي:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad (٢ - ٣٧)$$

وسنستعمل هذه الصيغة في المستقبل عند دراستنا للانحناء والمقاومة المعقدة.

وبتحليل المشتقة الثانية $\frac{d^2\sigma_\psi}{d\psi^2}$، من الممكن التأكد من ان الاجهاد الرئيسي



الشكل ٢ – ٣٨

الاعظم يؤثر في المساحة الرئيسية بزاوية ψ_0 على شرط ان يكون ($\sigma_\alpha > \sigma_\beta$)، اما الاجهاد الرئيسي الادنى، فيؤثر في المساحة بزاوية $\psi_0 + 90°$.

مثال ٢ – ١٠. يراد تحديد مقدار واتجاه الاجهادات الرئيسية في حالة الاجهاد المبينة في الشكل ٢ – ٣٨.

الحل. نحدد موضع المساحات الرئيسية العمودية على سطح الرسم بواسطة الصيغة (٢ — ٣٥):

$$\tan 2\psi_0 = \frac{2 \times 100}{200 - 300} = -2; \quad 2\psi_0 = -63°30';$$
$$\psi_0 = 31°45'.$$

ان العلامة السالبة تظهر بان ψ_0 تحسب من اتجاه $\sigma=300 kg/cm^2$ باتجاه دوران عقرب الساعة.

وبواسطة الصيغة (٢ — ٣٦) نحصل على:

$$\sigma_{max} = \frac{300+200}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(300-200)^2 + 4 \times 100^2} =$$
$$= 250 + 112 = 362 \ kg/cm^2$$
$$\sigma_{min} = 250 - 112 = 138 \ kg/cm^2 .$$

وطبقا لما ذكر اعلاه، فان σ_{max} تؤثر على مساحة ذات زاوية ψ_0 و σ_{min} على مساحة ذات زاوية $\psi_0+90°$.

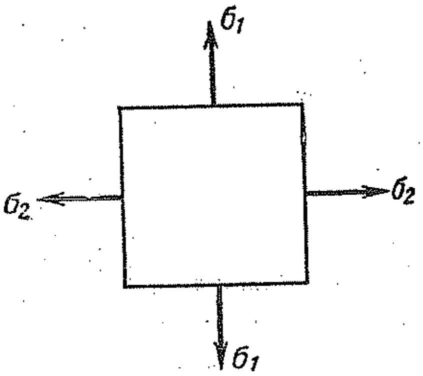
مثال ٢ — ١١. ماذا يتغير فى المثال السابق، لو ان الاجهادات المماسة كانت متجهة الى الجهة المضادة؟

الحل. بما ان الاجهاد المماسى τ يصبح سالبا، فان زاوية ميلان المساحات الرئيسية ايضا تتغير اشارتها، وتساوى $\psi_0=31°45'$ (نضعها باتجاه مضاد لدوران عقرب الساعة). ان مقدار الاجهادات الرئيسية لا يتغير.

٢٠ — العلاقة بين التشوهات والاجهادات فى حالات الاجهادات السطحية والحجمية (تعميم قانون هوك)

نحدد التشوهات النسبية ε_1 ، ε_2 فى اتجاهات الاجهادات الرئيسية فى حالة الاجهاد السطحى (الشكل ٢ — ٣٩). ولاجل هذا نستعمل قانون هوك لحالة الاجهاد الوحيد المحور (انظر الصيغة ٢ — ٣)، والعلاقة (٢ — ٥) بين التشوهات الطولية والعرضية وكذلك مبدأ تراكب القوى (مبدأ جمع التشوهات).

وبتأثير الاجهاد σ_1 وحده فان الاستطالة النسبية الرأسية تساوى:



الشكل ٢ — ٣٩

$$\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_1}{E}$$

فى نفس الوقت، فان التقلص النسبى فى الاتجاه الافقى يساوى:

$$\varepsilon_{21}=-\mu\frac{\sigma_1}{E}.$$

وبتأثير الاجهاد σ_2 وحده، تحدث فى الاتجاه الافقى استطالة تساوى $\varepsilon_{22}=\frac{\sigma_2}{E}$، وفى الاتجاه الرأسى، تقلص يساوى $\varepsilon_{12}=-\mu\frac{\sigma_2}{E}$.

وبجمع التشوهات، نحصل على:

$$\begin{cases}\varepsilon_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}=\frac{\sigma_1}{E}-\mu\frac{\sigma_2}{E},\\ \varepsilon_2=\varepsilon_{22}+\varepsilon_{21}=\frac{\sigma_2}{E}-\mu\frac{\sigma_1}{E}\end{cases} \qquad (٣٨-٢)$$

ان هذه الصيغ، تعبر عن تعميم قانون هوك لحالة الاجهادات السطحية. واذا كانت التشوهات ε_1 و ε_2 معروفة، وبحل المعادلة (٢ — ٣٨) بالنسبة الى الجهدين σ_1 و σ_2، نحصل على الصيغ التالية:

$$\begin{cases}\sigma_1=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2),\\ \sigma_2=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1).\end{cases} \qquad (٣٩-٢)$$

وبطريقة مشابهة، ففى حالة الاجهاد الحجمية، عندما يكون كل من الاجهادات الرئيسية الثلاثة σ_1 و σ_2 و σ_3 غير مساو للصفر، نحصل على الصيغ التالية:

$$\begin{cases}\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)],\\ \varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)],\\ \varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)].\end{cases} \qquad (٤٠-٢)$$

ان هذه الصيغ تمثل قانون هوك العام لحالة الاجهاد الحجمية. ان التشوها ε_1، ε_2، ε_3، عندما تكون فى اتجاهات الاجهادات الرئيسية تسمى بالتشوها الرئيسية.

وبمعرفة ε_1، ε_2، ε_3، يمكن حساب تغير الحجم عند التشوه. نأ مكعبا ابعاده ١×١×١ سم. فان حجمه قبل التشوه $V_0=1cm^3$ اما حج بعد التشوه فيساوى:

$$V=(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\approx 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

(ان حواصل ضرب ε هى مقاديرمتناهية فى الصغر بمقارنتها مع ε نفسه ولذلك فاننا نهملها).

وان التغير النسبى للحجم ε_v هو:

$$\varepsilon_V=\frac{V_1-V_0}{V_0}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3. \qquad (٢-٤١)$$

ونعوض هنا عن قيم ε_1، ε_2، ε_3، من الصيغة (٢ — ٤٠)، نحصل على

$$\varepsilon_V=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3). \qquad (٢-٤٢)$$

ونستنتج من الصيغة (٢ — ٤٢)، ان معامل بواسون μ لا يمكن ان يكو اكبر من ٥ر٠ . وبالفعل، فان الحجم لا يمكن ان يقل فى حالة الشد الحجمى اى ان ε_v موجب، وهذا ممكن فقط عندما يكون $1-2\mu\geqslant 0$، لان الاجهادات الرئيسية فى هذه الحالة موجبة $(\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3>0)$.

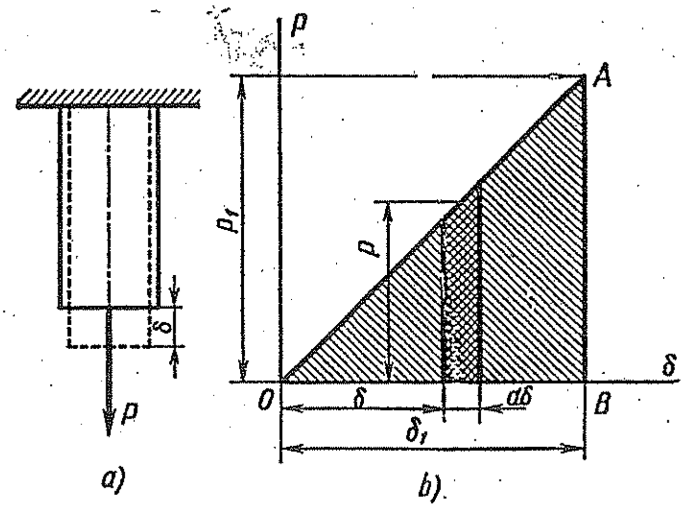
وتعبر الصيغ المرقمة من (٢ — ٣٨) الى (٢ — ٤٢) عن العلاقة، ليس فقط بين التشوهات والاجهادات الرئيسية، وانما بين كل القيم (غير الرئيسية) لهذه المقادير، اى انها تبقى صحيحة ايضا حتى عندما تؤثر الاجهادات المماسية على المساحات.

وهذا ينتج عن كون التشوهات الخطية لا تعتمد على الاجهادات المماسية

٢١ – شغل القوى الخارجية والداخلية عند الشد (الانضغاط) ، طاقة وضع التشوه

عند الشد (الانضغاط) فان القوى الخارجية تبذل شغلا، نتيجة لازاحة نقاط تأثيرها (شكل ٢ – ٤٠، a) .

نحسب الشغل الذى تبذله القوة الخارجية المؤثرة استاتيكيا، اى القوة التى يزداد مقدارها اثناء عملية التشوه من الصفر حتى القيمة النهائية بصورة بطيئة.



الشكل ٢ – ٤٠

ان الشغل الاولى dA الذى تبذله القوة الخارجية P فى الازاحة يساوى:

$$dA = Pd\delta \qquad (٢ – ٤٣)$$

ولكن توجد علاقة بين δ و P (قانون هوك)،

$$\delta = \frac{Pl}{EF}$$

ومنها:

$$P = \frac{EF\delta}{l} .$$

نعوض عن هذه القيمة فى الصيغة (٢ – ٤٣)، نحصل على:

$$dA = \frac{EF}{l}\delta d\delta .$$

ونحصل على الشغل الكلى الذى تبذله القوة بواسطة اخذ تكامل هذ الصيغة فى الحدود من صفر حتى القيمة النهائية للازاحة δ_1:

$$A=\frac{EF}{l}\int_0^{\delta_1}\delta d\delta=\frac{EF\delta_1^2}{2l}=\frac{P_1\delta_1}{2}$$

وهكذا:

$$A=\frac{1}{2}P_1\delta_1 \quad (٢ - ٤٤)$$

اى ان الشغل الذى تبذله القوة الخارجية المؤثرة استاتيكيا، يساوى نصف حاصل ضرب المقدار النهائى للقوة فى المقدار النهائى للازاحة المناظرة.

ويعبر عن الشغل الذى تبذله القوة P بيانيا (مع الاخذ فى الاعتبار مقياس الرسم) بالمساحة OAB فى الرسم البيانى المرسوم باحداثيات $P-\delta$ (الشكل ٢ — ٤٠، b).

وعند التشوه، فان القوى الخارجية ليست هى وحدها التى تبذل شغلا بل ان القوى الداخلية (قوى المرونة) تبذل شغلا معينا كذلك.

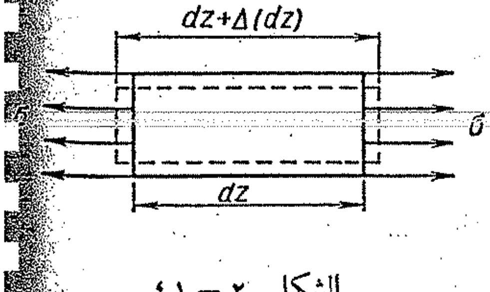
ويمكن حساب شغل القوى الداخلية فى حالة الشد (الانضغاط) كما يلى:

ان الشكل ٢ — ٤١ يبين الجزء dz من القضيب الذى تؤثر عليه الاجهادات العمودية σ والتى تعتبر بالنسبة لهذا الجزء قوة خارجية.

ومن البديهى ان تكون القوى الداخلية متجهة فى الجهة المُضادة، اى فى جهة مضادة للازاحة. ولذا فان شغل القوى الداخلية عند التحميل يكون دائما سالبا.

ان الشغل الاولى للقوى الداخلية (للجزء dz) يحسب بصيغة مشابهة لصيغة (٢ — ٤٤):

$$dU=-\frac{1}{2}N\Delta(dz) \quad (٢ - ٤٥)$$



الشكل ٢ — ٤١

حيث N — القوى الداخلية (القوة الطولية)،

$\Delta(dz)$ — استطالة الجزء.

ولكن حسب قانون هوك، يكون عندنا:

$$\Delta(dz)=\frac{Ndz}{EF},$$

اذن،

$$dU=-\frac{1}{2}\frac{N^2dz}{EF}. \qquad (٢ - ٤٦)$$

ونحصل على الشغل الكلى للقوى الداخلية، بأخذ تكامل كلا طرفى الصيغة (٢ — ٤٦) على طول القضيب l كله:

$$U=-\frac{1}{2}\int_0^l\frac{N^2dz}{EF}. \qquad (٢ - ٤٧)$$

اذا كانت N و E و F ثابتة، فعند ذلك:

$$U=-\frac{1}{2}\frac{N^2l}{EF}=-\frac{EF\Delta l^2}{2l}$$

حيث ان المقدار $\Delta l=\delta=\frac{Nl}{EF}$ — استطالة القضيب.

ان المقدار المساوى لشغل القوى الداخلية والمضاد له فى الاشارة، يسمى بطاقة وضع التشوه. وهى تمثل الطاقة التى تتراكم فى الجسم اثناء التشوه.

وعلى هذا الاساس فان طاقة الوضع عند الشد (الانضغاط) للقضيب ذى المقطع الثابت عند تأثير القوى الطولية التى يكون مقدارها متساويا فى جميع المقاطع العرضية للقضيب تحدد بالصيغة:

$$\Pi=-U=\frac{1}{2}\frac{N^2l}{EF}=\frac{EF\Delta l^2}{2l}. \qquad (٢ - ٤٩)$$

ان طاقة الوضع المنسوبة الى وحدة حجم المادة، تسمى بطاقة الوضع النوعية (وحدة طاقة الوضع):

$$u=\frac{\Pi}{V}=\frac{\Pi}{Fl}=\frac{N^2l}{2EF^2l}=\frac{\sigma^2}{2E}, \qquad (٢ - ٥٠)$$

$u=\frac{1}{2}E\varepsilon^2$ (وذلك لان $\sigma=E\varepsilon$)

او

$$u=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon. \qquad (٢ - ٥١)$$

وفى حالة الاجهاد الحجمى، فان وحدة طاقة الوضع تتكون من حاصل جمع ثلاثة حدود:

$$u=\frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_2+\sigma_3\varepsilon_3)\,. \qquad (٢ — ٥٢)$$

وباستعمال قانون هوك العام نحصل على:

$$u=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]\,. \qquad (٢ — ٥٣)$$

وكحالة خاصة، اذا اعتبرنا فى هذه الصيغة، ان احد الاجهادات الرئيسية يساوى صفرا، فمن السهل الحصول على صيغة لحالة الاجهاد السطحى.

وقد اظهرت التجارب، ان شغل القوى الخارجية عمليا عند السرعات العادية للتحميل، يستهلك كليا لتكوين احتياطى طاقة وضع التشوه. ان الخسائر القليلة فى الطاقة والتى تحدث بصورة رئيسية عند تسخين الجزء، ليست لها اهمية عملية، ولذلك فمن الممكن اهمالها.

مثال ٢ — ١٢. يراد تحديد الاجهادات σ_1 و σ_2 اذا كانت التشوهات النسبية فى هذه الاتجاهات تساوى $\varepsilon_1=0.001$، $\varepsilon_2=0.0008$، معامل المرونة يساوى $E=2\times10^6 kg/cm^2$، ومعامل بواسون يساوى $\mu=0.3$.

الحل. من الصيغة (٢ — ٣٩) عندنا:

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2)=$$

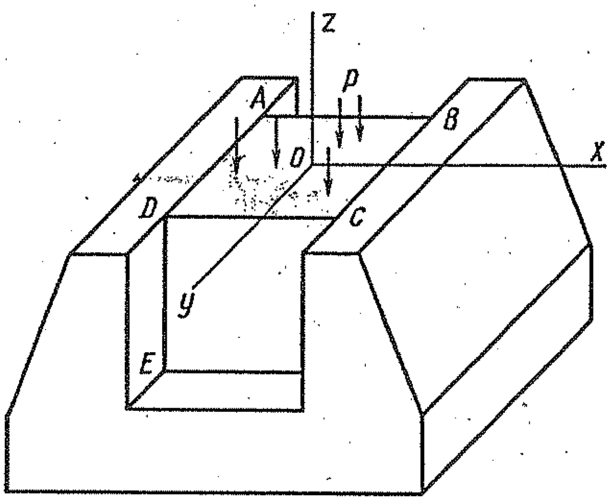
$$=\frac{2\times10^6}{1-0.3^2}(0.001-0.3\times0.008=1670\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$\sigma_2=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1)=$$

$$=\frac{2\times10^6}{1-0.3^2}(-0.0008+0.3\times0.001)=-1100\ \mathrm{kg/cm^2}\,.$$

مثال ٢ — ١٣. مكعب من المطاط $ABCD$ وضع بسهولة، وبدون فراغات فى قالب فولاذى بحيث كان الوجهان المتقابلان للمكعب طليقين (الشكل ٢ — ٤٢). وعلى اعلى المكعب أثر بضغط قدره $p\ kg/cm^2$. يراد تحديد الاجهاد والتشوهات ε_y و ε_z، وكذلك التغير النسبى فى الحجم، مع العلم ان معامل

مرونة المطاط $=E$، معامل بواسون $=\mu$، يهمل الاحتكاك بين المكعب والجدران. ان القالب الفولاذى نعتبره مطلق الصلابة (لا يتشوه).



الشكل ٢ – ٤٢

الحل. بواسطة قانون هوك العام:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right],$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right].$$

وبما ان من شروط المسألة:

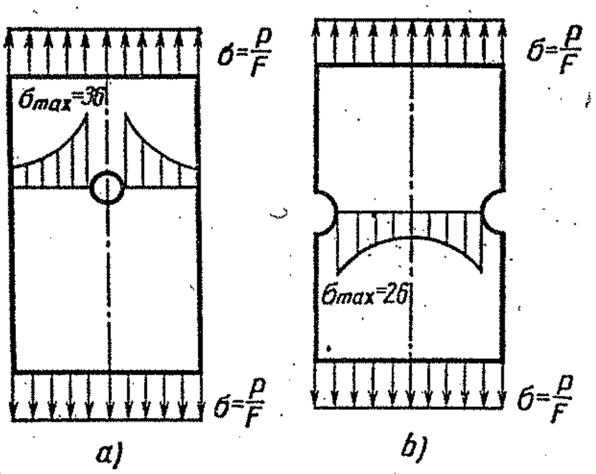
$$\sigma_y = 0, \quad \sigma_z = -p, \quad \varepsilon_x = 0$$

وباستعمال هذه الشروط، نحصل على:

$$\sigma_x = -\mu p, \quad \varepsilon_y = \frac{\mu(\mu+1)}{E}p, \quad \varepsilon_z = -\frac{1+\mu^2}{E}p;$$
$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E}p$$

٢٢ – تركز الاجهادات. الاجهادات التلامسية

ان التوزيع المنتظم للاجهادات على المقاطع العرضية للقضيب المشدود (المضغوط) يكون فقط فى الاماكن البعيدة نوعا ما عن موضع تأثير القوى، وبشرط ان تكون الابعاد العرضية على امتداد القضيب كله لا تتغير مطلقا او تتغير تدريجيا. واذا تغير نفس محيط المقطع الطولى تغيرا حادا، ففى المواضع التى يتحطم فيها الشكل المنشورى او الاسطوانى للقضيب بشدة، يكون توزيع الاجهادات فى مقاطعه العرضية غير منتظم.



الشكل ٢ – ٤٣

ان ظاهرة زيادة الاجهاد الحادة فى الاماكن التى يتغير فيها شكل القضيب الهندسى بشدة، تسمى تركز الاجهاد. ويجرى تحديد الاجهادات فى اماكن التركيز بصورة تجريبية او بطرق نظرية المرونة.

وعلى سبيل المثال تظهر فى الشكل ٢ – ٤٣، a نتائج حل مسألة لشريط عريض ذى ثقب صغير، تؤثر عليه قوة شد منتظمة. ان الاجهاد الاعظم فى حافة الثقب σ_{max} اكبر بثلاث مرات من الاجهاد المتوسط (الاسمى) الذى يحسب بالصيغة $\sigma = \frac{P}{F}$.

اما بالنسبة للشريط العريض الذى يوجد فى نهايتيه حزين نصف

دائريين، فان الاجهاد الاعظم، اكبر من الاجهاد الاسمى بمرتين (الشكل ٢ ــ ٤٣، b).

ان نسبة الاجهاد الموضعى الاعظم الى الاجهاد الاسمى تسمى بالمعامل النظرى لتركز الاجهادات:

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}. \quad (٢ - ٥٤)$$

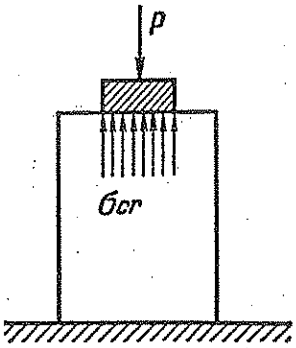
ويقصد بالاجهاد الاسمى، ذلك الاجهاد الذى يحدد بصيغ مقاومة المواد دون الاخذ فى الاعتبار مفعول التركز، مثلا للشريط ذى الثقب: $\sigma = \frac{P}{F}$، حيث F ــ مساحة المقطع المضعف.

ان المعامل النظرى لتركز الاجهادات الذى حدد بافتراض ان المادة عند التشوه تتبع قانون هوك، لا يعطى الفكرة الصحيحة حول تأثير تركز الاجهادات على متانة الجزء فى كثير من الحالات. واذا تبعت المادة قانون هوك قبل حصول الانهيار، فان متانة الجزء الذى توجد فيه اجهادات متركزة تكون اقل من متانة الجزء المماثل ولكن دون وجود مواضع للتركز بمقدار α_σ من المرات (المعامل النظرى لتركز الاجهادات). وقد اظهرت التجارب ان نقصان متانة معظم المواد بوجود الاجهادات المتركزة يكون اقل من α_σ من المرات. ويحدد هذا التقليل تجريبيا، وذلك بنسبة المقاومة القصوى (σ_u) للجزء الذى ليست له اجهادات متركزة، الى المقاومة القصوى σ_{uc} للجزء الذى يملك مركزا للاجهاد:

$$k_s = \frac{\sigma_u}{\sigma_{uc}} \quad (٢ - ٥٥)$$

ان المعامل k_s يسمى بالمعامل الفعال لتركز الاجهادات (للاجهادات المتركزة). وقيم k_s تعطى فى الدليل.

واظهرت التجارب، ان فى حالات التحميل الاستاتيكى، بالنسبة للاجزاء المصنوعة من المواد اللدنة (البلاستيكية) يكون المعامل $k_s = 1$ عمليا. اى لمثل هذه الاحمال، فان تركز الاجهادات



الشكل ٢ ــ ٤٤

يؤخذ فى الاعتبار فقط عند حساب الاجزاء المصنوعة من المواد الهشة او المواد القليلة اللدونة.

وعند تأثير الحمل المتغير (حساب الكلال)، فان تركز الاجهادات يؤخذ فى الاعتبار لجميع المواد.

وتظهر الاجهادات الموضعية العالية ايضا فى اماكن انتقال الضغط من جسم الى اخر. وتسمى باجهادات التلامس او اجهادات التهصر. ومقاديرها تنخفض بسرعة، حسب الابتعاد عن مساحة تماس الاجزاء.

واذا كانت للاجسام قبل تماسها سطوح مستوية (الشكل ٢ — ٤٤)، فان توزيع الاجهادات على مساحات التلامس يمكن ان يعتبر منتظما. ويمكن تحديد الاجهادات بالصيغة التالية:

$$\sigma_{cr} = \frac{P}{F} \cdot \qquad (٢ - ٥٦)$$

اما اذا كانت للاجسام قبل تماسها سطوح منحنية، كما فى حالة المحامل مثلا، فان مسألة تحديد اجهادات التلامس تصعب، ويمكن حلها فقط بطرق نظرية المرونة. وتحل المسألة بعد استعمال الافتراضات التالية:

أ — ان مواد الاجزاء المتلامسة تخضع لقانون هوك.

ب — ان الابعاد الخطية لمساحة الاتصال قليلة، بمقارنتها مع انصاف اقطار تقوس السطوح المتلامسة.

جـ — القوة الضاغطة متجهة باتجاه العمودى على سطح التلامس.

د — على سطح التلامس تظهر فقط اجهادات عمودية.

وكما تبرهن نظرية المرونة، فعند استعمال هذه الافتراضات، تتوزع الاجهادات العمودية على مساحة التلامس حسب قانون سطح مجسم القطع الناقص، اما مساحة الاتصال فى الحالة العامة، فتأخذ شكل القطع الناقص. ويؤثر الاجهاد الاعظم على مركز مساحة التلامس. ونأتى هنا ببعض الصيغ بلا استنتاج، للحالات الخاصة للتشوهات التلامسية.

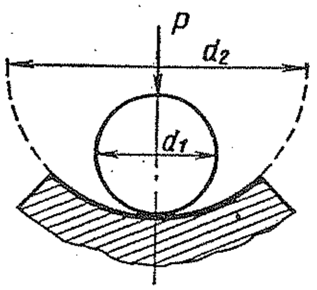
١ ــ عند الضغط المتبادل بين كرتين مرنتين قطر كل منهما d_1 و d_2 (الشكل ٢ ــ ٤٥)، تظهر مساحة تلامس دائرية، نصف قطرها a يمكن تحديده بالصيغة:

$$a = 0.88 \sqrt[3]{\frac{P d_1 d_2}{E\,(d_1 + d_2)}}. \qquad (٢ - ٥٧)$$

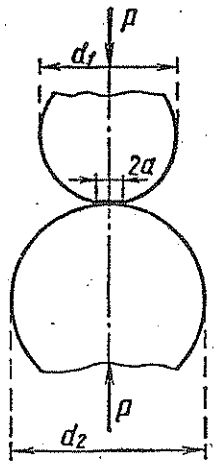
ويحدد الاجهاد الاعظم للتهصر في مركز المساحة بالصيغة:

$$\sigma_{\max} = 0.62 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}\right)^2}. \qquad (٢ - ٥٨)$$

وعند استنتاج هذه الصيغ، فان معامل بواسون يؤخذ $\mu = 0.3$، وان الصيغة (٢ ــ ٥٨)



الشكل ٢ ــ ٤٦



الشكل ٢ ــ ٤٥

تنطبق على تلك الحالة التي تكون فيها الكرة ذات القطر d_1 واقعة في سطح دائرى مقعر بقطر d_2 (الشكل ٢ ــ ٤٦)، ولكن في هذه الحالة يجب ان تغير اشارة d_2 الى العكس. وفي النهاية نحصل على:

$$\sigma_{\max} = 0.62 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2}\right)^2}. \qquad (٢ - ٥٩)$$

وبالمقارنة مع الحالة السابقة، فان الاجهاد يكون هنا اقل.

وفى حالة ضغط الكرة على مستوى، تحدد الاجهادات بالصيغة (٢ ــ ٥٩)، اذ نفرض ان d_2 كبيرة الى مالانهاية

$$\sigma_{\max} = 0.62 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{d^2}}. \qquad (٢ - ٦٠)$$

اما صيغ تحديد الاجهادات التلامسية للحالات الاخرى، فهى موجودة فى الدليل او فى مناهج الدراسة الكاملة لموضوع مقاومة المواد.

وقد اظهرت التجارب، ان المواد قادرة على تحمل اجهادات تلامسية كبيرة جدا. وهذا ناتج عن كون مثل هذه الاجهادات تنخفض بسرعة حسب ابتعادها عن منطقة التلامس، وكذلك لان المادة القريبة من مساحة التلامس لا تتأثر بانضغاط احادى المحور، وانما بانضغاط ثلاثى المحور (حجمى). ان المادة عند نفس الانضغاط الثلاثى المحور وكما سيتبين فيما بعد (انظر الباب الثامن)، لها القابلية على تحمل اجهادات كبيرة.

الجدول ٢ — ٧

المادة	المقاومة النهائية σ_u، كجم / مم٢	اجهادات التلامس المسموح به $[\sigma_{cont.}]$، كجم / سم٢
	الفولاذ	
30	٤٨ — ٦٠	٨٥٠٠ — ١٠٥٠٠
40	٥٧ — ٧٠	١٠٠٠٠ — ١٣٥٠٠
50	٦٣ — ٨٠	١٠٥٠٠ — ١٤٠٠٠
50 Г	٦٥ — ٨٥	١١٠٠٠ — ١٤٥٠٠
20 X	٧٠ — ٨٥	١٢٠٠٠ — ١٤٥٠٠
	حديد الذهر	
СЧ21 - 40	٩٥	٨٠٠٠ — ٩٠٠٠
СЧ22 - 44	١٠٠	٩٠٠٠ — ١٠٠٠٠

وفى الجدول ٢ — ٧ توجد قيم اجهادات التلامس (σ_{cont}) المسموح بها لبعض المواد.

واذا كانت ابعاد مساحة التلامس قريبة من ابعاد انصاف اقطار الاقواس فى سطوح التلامس، فان الصيغ المذكورة اعلاه لا تستعمل.

ونلاقى مثل هذه المسائل مثلا عند تحديد الضغط المعين بين سطح جسم المسمار او البرشامة والسطح الاسطوانى للثقب. وفى هذه الحالات فان الحل

النظرى يكون صعبا جدا، وبغية التأكد من متانة المادة فى منطقة مساحة التلامس، تستعمل عادة طرق الحساب الهندسية المبنية على اساس التجارب. فعند حساب تهصر البرشامات والمسامير مثلا نعتبر ان الاجهادات موزعة على مساحة التهصر بصورة منتظمة، اما اجهادات التهصر المسموح بها والتى تستعمل على اساس المعطيات التجريبية، فانها اكبر بمرتين او بمرتين ونصف من الاجهادات المسموح بها فى حالة الشد (الانضغاط):

$$[\sigma_{cr}] = 2 - 2.5\,[\sigma]$$

وبوجود الاجهادات التلامسية فى مساحة التلامس (نقل الحركة بالمسننات واللولب... الخ) وكذلك عند تأثير الاحمال المتكررة، فان اجهادات التلامس والاجهادات المسموح بها، تحدد بالصيغ الموجودة فى موضوع «قطع غيار الآلات».